Пусть http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image001.gif - непрерывная функция комплексного http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image002.gif, определенная в области http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image003.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif - [гладкая кривая](http://sernam.ru/lect_math2.php?id=61), лежащая в http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image003.gif, с началом в точке http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image005.gif и концом в точке http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image006.gif (рис. 137), заданная уравнением

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image007.gif http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image008.gif

или, что все равно, двумя уравнениями

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image009.gif       http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image008.gif.                (1)

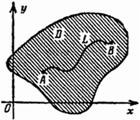


Рис. 137

Как всегда, направление на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif соответствует изменению параметра http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image011.gif от http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image012.gif до http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image013.gif http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image014.gif.

[Интеграл](http://edu.alnam.ru/book_dmath.php?id=226) от функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image015.gif вдоль кривой http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif определяется следующим образом:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image016.gif

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image017.gif

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image018.gif.

Если учесть, что http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image019.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image020.gif, то равенство (2) можно коротко записать так:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image021.gif.             (3)

Таким образом, из (2) видно, что [интеграл](http://edu.alnam.ru/book_dmath.php?id=226) по комплексному переменному есть сумма двух[криволинейных интегралов](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=244), и его вычисление сводится к вычислению обыкновенных интегралов.

Интеграл (2) существует для любой непрерывной функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image015.gif (в этом случае функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image022.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image023.gif также непрерывны) и любой [гладкой кривой](http://sernam.ru/lect_math2.php?id=61) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif (т. е. когда http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image024.gif, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image025.gif) непрерывны и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image026.gif).

Если кривая http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif кусочно-гладкая и состоит из гладких ориентированных кусков http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image027.gif, то по определению считаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image028.gif.                   (4)

На основании свойств [криволинейного интеграла](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=244) легко получаем

1)

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image029.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image030.gif та же кривая, что и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif, но ориентированная противоположно (см. нашу книгу «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление», § 7.4).

2)

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image031.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image032.gif - постоянные числа.

3)

Если http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image033.gif при http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image034.gif, то

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image035.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image036.gif - длина http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image004.gif.

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image095.gif,                      (10)

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image096.gif       http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_116.files/image097.gif.                    (11)

Формулы (10) и (11) являются основными в этой теории. Именно к ним, как мы увидим, обычно сводится вычисление [криволинейных интегралов](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=244) от аналитических функций